

Скалярное произведение векторов

1. Вспоминаем

Если не можешь вспомнить, найди ответы из предыдущего урока или стр. 136-137

- 1) Скалярным произведением двух векторов ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) называют произведение их модулей и косинуса угла между ними. Запиши формулу: _____.
- 2) Векторы \vec{a} и \vec{b} называют перпендикулярными, если угол между ними равен _____ градусов.
- 3) Если хотя бы один из векторов нулевой, то $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.
- 4) Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют _____ вектора \vec{a} и обозначают _____.

2. Проверяем ДЗ

№584

- 1) Дано: $|\vec{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = 45^\circ$

Найти: $\vec{m} \cdot \vec{n}$

Решение: Т.к. $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 7\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \cos 45^\circ$ (Значения косинусов можно смотреть на форзаце учебника) $= 7\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{28 \cdot 2}{2} = 28$

Ответ: $\vec{m} \cdot \vec{n} = 28$

- 2) Дано: $|\vec{m}| = 8$; $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = 150^\circ$

Найти: $\vec{m} \cdot \vec{n}$

Решение: Т.к. $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ$ (косинус 150° - не табличное значение, мы можем воспользоваться формулой приведения: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot (-\cos 30^\circ) = -8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} =$

$$= -\frac{8 \cdot 3}{2} = -12$$

Ответ: $\vec{m} \cdot \vec{n} = -12$

3. Изучаем

Мы уже выяснили, что 2 вектора \vec{a} и \vec{b} называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90° , теперь запишем теорему:

Теорема 16.1

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Существует так же ещё одна формула вычисления скалярного произведения векторов:

Теорема 16.2

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

А так же, зная координаты двух ненулевых векторов, можно вычислить косинус угла между ними:

Следствие

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad (*)$$

Рассмотрим пример:

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}(3; -2), \vec{n}(1; 0)$.

Дано: $\vec{m}(3; -2), \vec{n}(1; 0)$.

Найти: $\vec{m} \cdot \vec{n}$

Решение: Воспользуемся формулой, которая дана в предыдущей теореме. В нашем случае

$$a_1=3; a_2=-2; b_1=1; b_2=0.$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 3 + 0 = 3.$$

Ответ: $\vec{m} \cdot \vec{n} = 3$

4. Решаем самостоятельно

№585 (аналогично предыдущему примеру)

№589 (Определить в координатах $a_1 a_2 b_1 b_2$ и подставить в формулу

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}})$$